

Leçon 150 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Hau] : *Les contre-exemples en mathématiques*, Bertrand Hauchecorne

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

I Partie A - Ce qu'il faut savoir

I.1 Polynômes d'endomorphismes [Rom]

■ **Déf 1 (Polynôme d'endomorphisme) :**

■ **Déf 2 (Algèbre $K[X]$) :**

■ **Thm 3 (Spectre de $P(u)$) :**

I.2 Polynômes annulateurs [Rom] [Man-Mne]

■ **Déf 4 (Polynôme minimal) :**

■ **Prop 5 (Dimension) :**

■ **Prop 6 (Critère corps) :**

■ **Déf 7 (Polynôme caractéristique) :**

■ **Ex 8 (Nilpotents) :**

■ **Thm 9 (Cayley-Hamilton) :**

■ **App 10 (Calcul de puissances) :**

■ **App 11 (Calcul de l'inverse) :**

I.3 Lemme des noyaux

■ **Thm 12 (Lemme des noyaux) :**

■ **App 13 (Décomposition de Fitting) :**

II Partie B - Réduction de base

II.1 Diagonalisation [Rom] [Gri]

■ **Thm 14 (Critère de diagonalisabilité par polynôme annulateur) :**

■ **Rem 15 :** u diagonalisable ssi π_u est scindé à racines simples.

■ **Ex 16 :** Projecteurs et symétries.

■ **Ex 17 :** Diagonalisabilité de A telle que $A^5 = I_n$ suivant le corps.

■ **Ex 18 :** Exemple numérique ([Gri]).

■ **Prop 19 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit) :**

II.2 Trigonalisation [Rom]

■ **Thm 20 (Critère par polynôme annulateur) :**

■ **Ex 21 :** Matrice trigonalisable et non-diagonalisable.

■ **Ex 22 (Cas des corps algébriquements clos) :**

■ **Prop 23 (Endomorphisme induit trigonalisable) :**

III Partie C - Dunford sous tous les angles

III.1 Dunford [Gri] [Man-Mne] [Rom] [Hau]

■ **Thm 24 (Dunford) :**

■ **Ex 25 :** Voir [Gri].

■ **Ex 26 :** Voir [Man-Mne] (exo 6.3).

■ **Contre-Ex 27 :** Voir [Man-Mne] ou [Gri] ou [Hau]

■ **Thm 28 (Dunford effectif) :**

■ **Rem 29 :** Calcul sans connaître les valeurs propres.

III.2 Endomorphismes semi-simples [Rom]

■ **Déf 30 (Endomorphisme semi-simple) :**

■ **Ex 31 (Diagonalisables) :**

 Dév 32 (Polynôme minimal et semi-simplicité) :

App 33 (Dunford) :

IV Partie D - Exponentielles de matrices [Rom]

| Déf 34 (Exponentielle de matrice) :

| Prop 35 (Polynôme en u) :

| Prop 36 (Produit) :

| Contre-Ex 37 : Cas où cela ne commute pas.

| Prop 38 (Diagonalisabilité et Dunford) :

| Thm 39 (Surjectivité de l'exponentielle) :

V Partie E - Réduction plus avancée

V.1 Endomorphismes cyclique [Man-Mne]

| Déf 40 (Endomorphisme cyclique) :

| Ex 41 : En dim 2.

| Ex 42 : Endomorphisme à n valeurs propres distinctes.

| Thm 43 (Polynôme minimal, caractéristique) :

| Prop 44 (Commutant) :

[Supplémentaire stable]

V.2 Réduction de Frobenius [Man-Mne]

| Thm 45 (Frobenius) :

| Déf 46 (Invariant de similitude) :

App 47 (Invariants de similitudes) :

| Ex 48 : Voir [Man-Mne].

Rem 49 : On retrouve le résultat sur le commutant.

App 50 (Bicommutant) :

V.3 Réduction de Jordan [Rom] [Man-Mne]

 Dév 51 (Jordan) :